המסלול האקדמי המכללה למינהל

בית הספר למדעי המחשב

ת"ז הסטודנט:_____

מס' חדר:_____ מס' נבחן:_____

מבחן בקורס: מתמטיקה בדידה 1

קוד נושא: 617011

תאריך הבחינה: 24/07/2019 שעה 9:00

שנה"ל: תשע"ט סמסטר: ב מועד: ב'

שם המרצה: ד"ר לודה מרקוס-אפשטיין

שם המתרגל: אלעד עטייא

משך הבחינה: 3 שעות

מספר חלקים בבחינה: 2

הוראות לנבחנים:

- **במבחן 2 חלקים:**

חלק א' – שאלות פתוחות –3 שאלות פתוחות (בסה"כ בחלק זה 40 נקודות)

א. משקל כל שאלה מופיע בצמוד אליה.

ב. יש לנמק בפירוט את תשובותיך.

ג. יש לענות על כל השאלות של חלק א' באותה המחברת.

חלק ב' – שאלות ברירה – 10 שאלות ברירה (בסה"כ בחלק זה 60 נקודות)

א. משקל כל שאלה – 6 נקודות

ב. יש למלא **בכתב יד ברור** במקומות המיועדים **בחציו הימני של דף הקידוד** את שם ביה"ס, חדר המבחן, מספר הנבחן, שם הקורס, תאריך הבחינה, שם המרצה, מספר תעודת הזהות (מספר בן תשע ספרות, כולל ספרת ביקורת) ואת מספר השאלון (המופיע בצידו הימני העליון של השאלון)

ג. *** **חשוב מאוד**:

בדף הקידוד יש לרשום ולקדד את מספר השאלון מימין לשמאל (להוסיף אפסים משמאל במידת הצורך)

ד. בכל שאלה יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר ולסמנה במקום המיועד בדף הקידוד, **בעט שחור או כחול בלבד ובאופן ברור ומודגש**

ה. אין לסמן את התשובות על גבי דף הקידוד במַדְגֵּשׁ (מַרְקֶר) זוהר!

ו. רק דף הקידוד ייבדק!

- יש לענות על כל השאלות
- הבחינה **ללא** חומר עזר
- שימוש במחשבון כיס: **כן** – מחשבון **ללא צג גרפי**
- נספח: יש (דף נוסחאות)
- **יש** להחזיר את השאלון

בהצלחה !!!

חלק א' – שאלות פתוחות: (ניקוד: 40 נקודות) יש לענות על כל השאלות

שאלה 1: [15 נק']

הוכיחו: **(עקרון האינדוקציה המתמטית)**

תהי $P(n)$ טענה התלויה במספר טבעי n ($n \in \mathbb{N}$).

על-מנת ש- $P(n)$ תהיה נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$, מספיק שיתקיימו שני התנאים הבאים:

1) בסיס האינדוקציה - $P(1)$ נכונה;
2) שלב האינדוקציה – לכל $1 \le k \in \mathbb{N}$: נכונות $P(k)$ גוררת את נכונות $P(k+1)$.

שאלה 2: [15 נק']

נגדיר יחס S מעל $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \left((a,b)S(c,d) \leftrightarrow (a \ne c \wedge a \mid c) \vee (a = c \wedge b \mid d)\right).$$

1) [6 נק'] הוכיחו ש- $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, S)$ היא קס"ח.
2) [4 נק'] תהי $A = \{2,3,6\} \times \{5,10\}$. ציירו את דיאגרמת הסה עבור (A, S).
3) [2 נק'] האם (A, S) היא קס"מ? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.
4) [3 נק'] מצאו את כל האיברים המינימליים ב- (A, S). נמקו.

שאלה 3: [10 נק']

הוכיחו תוך שימוש בהכלה דו-כיוונית: תהיינה X, Y, Z קבוצות.

אם $X \cup Z = Y \cup Z$ וגם $X \cap Z = Y \cap Z$ אז $X = Y$.

חלק ב' – שאלות סגורות: (ניקוד: $6\cdot 10 = 60$ נקודות)
לפניך 10 שאלות ברירה. בכל שאלה עליך לסמן את התשובה הנכונה מבין 4 האפשרויות הרשומות.

שאלה מספר 1:
פסוק A נתון בצורת DNF השלמה:

$$(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$

איזו מהפסוקיות הבאות **אינה** מופיעה ב CNF השלמה של A ?

1. $(a \vee \neg b \vee \neg c)$
2. $(\neg a \vee b \vee c)$
3. $(a \vee \neg b \vee c)$
4. $(a \vee b \vee \neg c)$

שאלה מספר 2:
יהיו $P(x), Q(x)$ שני פרדיקטים עם תחום ההגדרה D_x אשר קבוצות האמת שלהם הן: T_Q ו- T_P, בהתאמה.
(להזכירכם, קבוצת אמת של פרדיקט היא קבוצת כל האיברים בתחום ההגדרה אשר הצבתם בפרדיקט הופכת אותו לפסוק אמת.)
איזו מהטענות הבאות **אינה** נכונה?

1. $\forall x\ (Q(x) \vee P(x))$ הוא פסוק אמת אם ורק אם $T_Q = T_P$.
2. קבוצת האמת של הפרדיקט $Q(x) \to P(x)$ היא $\overline{T_Q} \cup T_P$.
3. $\forall x\ (Q(x) \to P(x))$ הוא פסוק אמת אם ורק אם $T_Q \subseteq T_P$.
4. $\forall x\ (Q(x) \vee P(x))$ הוא פסוק אמת אם ורק אם $T_Q \cup T_P = D_x$.

שאלה מספר 3:
ההצרנה של הפסוק "לכל שני מספרים טבעיים m, n קיים מספר ראשוני p הגדול ממכפלתם" היא:

1. $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \exists\, p \in \mathbb{N} : ((p \geq 2 \wedge \forall k \in \mathbb{N}(p \mid k \to p = 1 \vee p = k)) \wedge p > mn)$
2. $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \exists\, p \in \mathbb{N} : ((p \geq 2 \wedge \forall k \in \mathbb{N}(p \mid k \to p = 1 \vee p = k)) \to p > mn)$
3. $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \exists\, p \in \mathbb{N} : ((p \geq 2 \wedge \forall k \in \mathbb{N} : p \nmid k) \wedge p > mn)$
4. $\forall m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \exists\, p \in \mathbb{N} : ((p \geq 2 \wedge \forall k \in \mathbb{N} : p \nmid k) \to p > mn)$

שאלה מספר 4:

הנוסח השקול לוגית לפסוק

$$\neg\left(\forall 2 \le m \in \mathbb{N}\ \forall 2 \le n \in \mathbb{N}\ \exists\, p \in \mathbb{N} : \left(\left(p \ge 2 \wedge \forall k \in \mathbb{N} : p \nmid k\right) \wedge p > mn\right)\right)$$

הוא:

1. $\exists\, 2 \le m \in \mathbb{N}\ \exists\, 2 \le n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N} : \left(\left(p \ge 2 \wedge \forall k \in \mathbb{N} : p \nmid k\right) \to p \le mn\right)$
2. $\exists\, m \notin \mathbb{N}\ \exists\, n \notin \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N} : \left(\left(p \ge 2 \wedge \forall k \in \mathbb{N} : p \nmid k\right) \to p \le mn\right)$
3. $\exists\, 2 \le m \in \mathbb{N}\ \exists\, 2 \le n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N} : \left(\left(p \ge 2 \wedge \forall k \in \mathbb{N} : p \nmid k\right) \to p > mn\right)$
4. $\exists\, m \notin \mathbb{N}\ \exists\, n \notin \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N} : \left(\left(p \ge 2 \wedge \forall k \in \mathbb{N} : p \nmid k\right) \to p > mn\right)$

שאלה מספר 5:

תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי מספר טבעי n.

באיזה מהמקרים הבאים הטענה $P(n)$ נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$?

1. $P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{N}\left(P(k) \to P(k+2)\right) \wedge \forall 3 \le m \in \mathbb{N}\left(P(m) \to P(m-1)\right)$
2. $P(3) \wedge \forall 3 \le k \in \mathbb{N}\left(P(3k) \to P(k)\right) \wedge \forall m \in \mathbb{N}\left(P(m) \to P(m+2)\right)$
3. $P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{N}\left(P(k) \to P(5k) \wedge P(5k-1) \wedge P(5k-2)\right)$
4. $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \forall k \in \mathbb{N}\left(P(k) \to P(4k) \wedge P(4k+1) \wedge P(4k+2)\right)$

שאלה מספר 6:

השלימו: על מנת שיתקיים: $R \cup R^2$ יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל A _____ שיתקיים: R יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל A.

סמנו את התשובה הנכונה.

1. מספיק
2. הכרחי
3. הכרחי ומספיק
4. לא הכרחי ולא מספיק

שאלה מספר 7:

תהי X קבוצה סופית לא ריקה בת 100 איברים. נגדיר יחס R מעל $P(X)$ באופן הבא:

$$\forall\ A, B \in P(X): \left(A\,R\,B \ \leftrightarrow\ |A| = |B| = |A \cup B|\right).$$

איזו מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

1. R הוא יחס שקילות מעל $P(X)$ ו- $\left|P(X)/R\right| = 2^{100}$.
2. $(P(X), R)$ קס"מ.
3. R הוא יחס שקילות מעל $P(X)$ ו- $\left|P(X)/R\right| = 100$.
4. R אינו יחס סדר מעל $P(X)$.

שאלה מספר 8:

תהי $A = \{1,2,3,4\}$. נתונות 3 מטריצות סמיכות (שכנות) של היחסים מעל A:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

אילו מהמטריצות הנתונות מייצגות יחס שקילות מעל A?

1. B ו C בלבד
2. כולן
3. C ו D בלבד
4. B ו D בלבד

שאלה מספר 9:

נגדיר: $\forall n \in \mathbb{N} : A_n = \left(1-\frac{1}{3n}, 2-\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

איזו מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

1. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\frac{2}{3}, 3\right), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left[1, \frac{3}{2}\right)$
2. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left[\frac{2}{3}, 3\right), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(1, \frac{3}{2}\right)$
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\frac{2}{3}, 3\right), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(1, \frac{3}{2}\right)$
4. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\frac{4}{3}, 3\right), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left[1, \frac{5}{2}\right)$

שאלה מספר 10:

איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה לכל שתי קבוצות X, Y?

1. $P(X \cap Y) \cap P(X \Delta Y) = \{\varnothing\}$
2. $P(X \cap Y) \cup P(X \Delta Y) = P(X \cup Y)$
3. $P(X) \cup P(X \Delta Y) = P(X \cup Y)$
4. $P(X) \cap P(X \Delta Y) = \{\varnothing\}$

--- סוף המבחן ---